$u(x,y) = f(x+y) + \frac{1}{x-y} g(y^2 - xz)$

$(2) \Rightarrow u_{xy} - x u_x + u = 0$

$u_x = 2e$ ----

Date : / $(3) \Rightarrow u_y = 2e$ ---Subject:

م 3

المعادلات التفاضلية الجزئية من النمط الزائدي:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \frac{f(x,t)}{\rho(x,t)} \quad , \quad a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}$$

$$= \frac{1}{\rho} f(x,t)$$

طاقة ذبذبات الوتر: نظري (ص) أثبات $E = K + U$

سوف نعين صيغة الذبذبات العرضية للوتر $E = K + U$

طاقة كلية، طاقة حركية، طاقة الوضع

علماً أن طرفا الوتر مثبت من طرفين

عنصر الوتر dx الذي يتحرك بالسرعة $v = u_t$ يكون له طاقة

حركية هي $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho(x) [u_t(x,t)]^2 dx$

وطاقة حركة الوتر كله تساوي:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} \rho(x) [u_t(x,t)]^2 dx$$

حساب طاقة الوضع:

طاقة وضع الذبذبات الأرضية للوتر ذي الشكل:

$u(x_0, t_0) = u_0(x)$

في اللحظة الزمنية $t = t_0$ تساوي العمل اللازم بذله لكي

ينتقل الوتر من وضع التوازن إلى وضع $u_0(x)$

نفرض ان الدالة $u(x,t)$ تعطي المقطع الجانبي للوتر في اللحظة

t علماً بأن: $u(x,0) = 0$ ، $u(x_0, t_0) = u_0(x)$

والعنصر dx تحت تأثير محصلة قوى الشد:

$$T u_x \big|_{x+dx} - T u_x \big|_x = T u_{xx} \cdot dx$$

يقطع خلال الفترة الزمنية dt المسافة $u_t(x,t)\, dt$

الثلاثاء 8 ← 11 رامز
11 ← 2 ابراهيم

الأربعاء 8 ← 11 كنزه
11 ← 1 طالب

Date : / /

Subject: ....

والعمل الذي يبذله الوتر كله خلال الفترة dt يساوي

$$\left\{ \int_0^p T_0\, u_{xx}(x,t) \cdot u_t(x,t)\, dx \right\} dt$$

نكامل بالتجزئة نفرض

$$T_0\, u_{xx}\, dx = dv \Rightarrow v = T_0\, u_x$$

$$u_t = u \Rightarrow du = T_0\, u_{xt}\, dx$$

$$= \left\{ T_0\, u_x \cdot u_t \Big|_{x=0}^{x=p} - \int_0^p T_0\, u_x\, u_{xt}\, dx \right\} dt$$

$$= \left\{ T_0\, u_x \cdot u_t \Big|_{x=0}^{x=p} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^p T_0 (u_x)^2\, dx \right\} dt$$

وبإجراء التكامل بالنسبة لـ t من $t=0$ إلى $t=T_0$

نحصل على:

$$= \int_0^{T_0} \left\{ T_0\, u_x\, u_t \Big|_{x=0}^{x=p} - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^p T_0 (u_x)^2\, dx \right\} dt$$

$$= \int_0^{T_0} T_0\, u_x\, u_t \Big|_{x=0}^{x=p} dt - \frac{1}{2} \left[\int_0^p T_0 (u_x)^2\, dx \right]_{T=0}^{T=T_0}$$

وبما أن طرفا الوتر مثبتين فإن الحد الأول يساوي الصفر

وبالتالي نحصل على:

$$-\frac{1}{2} \int_0^p T_0 \left[u_x(x, T_0) \right]^2 dx$$

وبالتالي العمل لا يعتمد عند انتقال الوتر المثبت الطرفين

من وضع التوازن $u=0$ إلى وضع $u_0(x)$ على طريقة نقل

الوتر الى هذا الوضع ويكون مساويا:

$$-\frac{1}{2} \int_0^p T_0 \left[u_x(X) \right]^2 dx$$

أي الطاقة وضع الوتر U في اللحظة $t = t_0$ باشارة مضادة
$$U = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} T_0 \left[u_x(x)\right]^2 dx$$
وبذلك تكون الطاقة الكلية للوتر مساوية:
$$E = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} \left[T_0 (u_0)^2 + \rho(x) \cdot [u_t]^2\right] dx$$
حيث ρ الكثافة الخطية للوتر و T_0 مقدار الشدة

صياغة المسائل الحدية ومسألة كوشي:

نفرض أنه لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية
$$A(x,y)\,u_{xx} + 2B(x,y)\,u_{xy} + C(x,y)\,u_{yy} = F(x,y,u,u_x,u_y) \quad ①$$
ولنفرض أن:
$$u(x,y)\big|_{\Gamma} = u_0(x,y)$$
$$\frac{\partial u}{\partial \rho}\Big|_{\Gamma} = u_1(x,y) \quad ②$$

ولنفرض D المنطقة التي يكون فيها $B - AC > 0$ أي المنطقة الزائدية كما في الشكل

ونفرض أن المنحني Γ هو المنحني المحيط بهذه المنطقة و $u_1(x,y), u_0(x,y)$ دالتان معرفتان على المنحني Γ والمطلوب ايجاد دالة $u(x,y)$ في المنطقة D بحيث أن هذه الدالة تحقق المعادلة التفاضلية المعطاة ① وعلى المنحني Γ تحقق الشروط الابتدائية ② هذه الدالة تدعى حل المعادلة التفاضلية المعطاة ① والموافقة للشروط الابتدائية ② علماً أن $\frac{\partial u}{\partial \rho}$

Date : / / Subject:

المشتقة في الاتجاه العمودي على المنحني Γ

ملاحظة: حل المعادلة التفاضلية (1) في المنطقة الزائدية بكاملها وذلك شرط أن الداله $u(x,y)$ تحقق المعادلة المعطاة ① والشروط الابتدائية الآتية

$$u(x,y)|_{\Gamma_1} = \varphi(x) \quad , \quad u(x,y)|_{\Gamma_2} = \psi(x)$$

هذه المسألة تدعى مسألة كورسا

أثبت صحة النظرية (وحدانية الحل)

نظرية الوحدانية:

أثبات نظرية الوحدانية:

نص النظرية: من الممكن وجود دالة واحدة فقط $u(x,t)$،

معرفة في المنطقة $R: \{0 \le x \le l \;,\; t \geq 0\}$

وتحقق المعادلة التفاضلية الآتية:

$$p(x)\, u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[K(x)\, u_x\right] + F(x,t) \quad ①$$

علماً أن: $p(x) > 0 \,,\, K(x) > 0 \;;\; 0 < x < l \quad t > 0$

والشروط الإضافية

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \,,\; u_t(x,0) = \psi(x) \;;\; 0 < x < l \\ u(0,t) &= \mu_1(t) \,,\; u(l,t) = \mu_2(t) \quad t > 0 \end{aligned}\right\} ②$$

إذا تحققت الشروط الآتية:

① الدالة $u(x,t)$ المشتقات التي تدخل في المعادلة (1) وكذلك المشتقة u_{xt} تكون دول متصلة في الفترة المغلقة $0 \le x \le l \,,\; t \geq 0$

② المعاملات $p(x), K(x)$ متصلان في الفترة المغلقة $0 \le x \le l$

Date : / / Subject:

البرهان :

نفرض أنه يوجد حلان للمسألة المطروحة هما $u_1(x,t)$ و $u_2(x,t)$

وبعد ذلك ندرس الفرق : $u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$

أ" سوف نثبت أن الدالة $u(x,t)$ تحقق المعادلة المتجانسة للمعادلة (1) أي تحقق المعادلة:

$$\rho(x)\, u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x) \cdot u_x \right]$$

وذلك كما يلي :

بما أن $u_1(x,t)$ حل للمعادلة (1) فهو يحقق هذه المعادلة أي أن :

$$\rho(x)\, u_{1tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\, u_{1x} \right] + f(x,t)$$

وأيضاً بما أن $u_2(x,t)$ حل للمعادلة (1) فهو يحقق هذه المعادلة أي:

$$\rho(x)\, u_{2tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\, u_{2x} \right] + f(x,t)$$

بطرح العلاقتين :

$$\rho(x)\left[u_{1tt} - u_{2tt} \right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\,(u_{1x} - u_{2x}) \right]$$

$$\rho(x) \cdot u_{tt} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\, u_x \right]$$

ثانياً أيضاً الدالة $u(x,t)$ تحقق الشروط الإضافية المتجانسة الآتية :

$$\left.\begin{array}{ll} u(0,t) = 0 & ,\ u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = 0 & ,\ u_t(x,0) = 0 \end{array}\right\} \quad (4)$$

وذلك بالاعتماد على الشروط (2)

ثالثاً سوف نثبت أولاً أن الدالة $u(x,t)$ تساوي الصفر بالتطابق وذلك كما يلي :

ندرس الدالة

$$E = \frac{1}{2}\int_0^l \left[k\,(u_x)^2 + \rho\,(u_t)^2 \right] dx \quad (5)$$

وسوف نثبت أنها لا تتعلق بـ t :

Date : / /　　　　Subject:

المعنى الفيزيائي للدالة $E(t)$ واضح وهي الطاقة.

الكلية الوترية للحظة الزمنية t تفاضل طرفي العلاقة (5) بالنسبة لـ t نجد:

$$\frac{\partial E(t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^{\ell}\left[k(u_x)^2 + \rho(u_t)^2\right]dx\right\}$$

$$= \int_0^{\ell}(k\, u_x\, u_{xt} + \rho\, u_t \cdot u_{tt})\,dx$$

$$\int_0^{\ell} k\, u_x\, u_{xt}\, dx + \int_0^{\ell} \rho\, u_t \cdot u_{tt}\, dx$$

وبتكامل الحد الأول من الطرف الأيمن بالتجزئة وبالاستفادة من الشروط الإضافية المعطاة (4) نحصل على

$$\int_0^{\ell} k\, u_x\, u_{xt}\, dx = \left[k\, u_x\, u_t\right]_{x=0}^{x=\ell} - \int_0^{\ell} u_t \frac{\partial}{\partial x}(k\, u_x)\,dx$$

$$= -\int_0^{\ell} u_t \frac{\partial}{\partial x}(k\, u_x)\,dx$$

وبالتالي نجد أنّ:

$$\frac{\partial E(t)}{\partial t} = \int_0^{\ell}\left[\rho\, u_t \cdot u_{tt} - u_t \frac{\partial}{\partial x}(k\, u_x)\right]dx$$

$$= \int_0^{\ell} u_t\left[\rho\, u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}(k\, u_x)\right]dx$$

وبالاعتماد على العلاقة (3) نحصل على:　$\frac{\partial E(t)}{\partial t} = 0$

أي أن بالمعادلة:　$E(t) = \text{const}$

وبالأخذ بالاعتبار الشروط الابتدائية من العلاقات (4) نحصل على: ومن العلاقة ⑤

Date : / / Subject:

$$E(0) = Const = \frac{1}{2}\int_0^l \left[k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2\right]_{t=0} dx = 0$$

أي أن ،

$$E(t) = 0$$

أي أن من العلاقة (5)

$$\frac{1}{2}\int_0^l \left[k(v_x)^2 + \rho(v_t)^2\right] dx = 0$$

وبما أن ؛ $k > 0$ و $\rho > 0$ عندما $0 \leq x < l$ $t > 0$

فإن من العلاقة الأخيرة نتحقق من أجل :

$$v_x(x,t) = 0 \quad , \quad v_t(x,t) = 0$$

وبالمكاملة : $v(x,t) = C_0$

وبالاستعانة بالشروط الابتدائية المتجانسة ④

$$v(x,0) = C_0 = 0$$

أي أن $C_0 = 0$ وبالتالي $v(x,t) = 0$

أي أن $u_1(x,t) - u_2(x,t) = 0$

وبالتالي ، $\Rightarrow u_1(x,t) = u_2(x,t)$

مثال 1 :

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y^2 u_{xy} + u_{yy} - \frac{2}{y} u_y = 0 \quad ①$$

في المنطقة $y > 0$ والذي يحقق الشروط الابتدائية

الآتية ② $u(x,y)|_{y=1} = 1 - x$; $u_y(x,y)|_{y=1} = 3$

أو نكتبها بالشكل : $u(x,1) = 1 - x$; $u_y(x,1) = 3$

الحل :

أولاً : أيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة :

$$A = 0 \quad , \quad 2B = y^2 \quad , \quad C = 1$$

$B^2 - AC = \frac{y^4}{4} - 0 > 0$ هذه المعادلة من النمط الزائدي

المعادلة المميزة :

$A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0$

$-y^2\,dx\,dy + dx^2 = 0$

$dx[-y^2\,dy + dx] = 0$

$x = c_1 \Leftarrow u_x = 0 \Rightarrow -y^2\,dy + dx = 0 \Rightarrow$

$-\frac{1}{3}y^3 + x = c_2$

أو $3x - y^3 = c_2$

نجري التحويل

$\xi = x$ و $\eta = 3x - y^3$

$\xi_x = 1$, $\xi_y = 0$, $\xi_{xy} = \xi_{xx} = \xi_{yy} = 0$

$\eta_x = 3$, $\eta_y = -3y^2$, $\eta_{xy} = 0$, $\eta_{xx} = 0$, $\eta_{yy} = -6y$

- $u_y = -3y^2 u_\eta$

- $u_{xy} = u_{\xi\xi}\,\xi_x\xi_y + (\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x)u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y$
$+ u_\xi\,\xi_{xy} + u_\eta\,\eta_{xy}$ ④

$u_{xy} = -3y^2 u_{\xi\eta} - 9y^2 u_{\eta\eta}$

- $u_{yy} = u_{\xi\xi}\,\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\,\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\,\eta_y^2 + u_\xi\,\xi_{yy}$
$+ u_\eta\,\eta_{yy}$

$u_{yy} = 9y^4 u_{\eta\eta} - 6y\,u_\eta$

$-3y^4 u_{\xi\eta} - 9y^4 u_{\eta\eta} + 9y^2 u_{\eta\eta} - 6y\,u_\eta -$

$\frac{2}{y}\{-3y^2 u_\eta\} = 0$

$= -3y^4 u_{\xi\eta} = 0 \Rightarrow u_{\xi\eta} = 0$

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left[u_\eta\right] = 0$$

بتثبيت ψ والمكاملة بالنسبة لـ ξ ;

$$u_\eta = \psi_1(\eta)$$

بتثبيت ξ والمكاملة بالنسبة لـ η :

$$u(\xi,\eta) = \int \psi_1(\eta)\, dx + \varphi(\xi)$$

$$u(\xi,\eta) = \psi(\eta) + \varphi(\xi)$$ بالعودة للمتحولات القديمة

$$u(x,y) = \varphi(x) + \psi(3x - y^2) \quad \text{—— ④}$$

وهو الحل العام

ايجاد الحل الخاص

c. نشتق العلاقة 4 بالنسبة لـ y

$$u_y = -3y^2\, \psi'(3x - y^3) \quad \text{—— ④'}$$

من ②، ④، ④' نجد

$$1 - x = \varphi(x) + \psi(3x - 1) \quad \text{—— ⑤}$$

$$3 = -3 \cdot \psi'(3x - 1) \quad \text{—— ⑥}$$

من العلاقة 6 نحصل على

$$\psi'(3x - 1) = -1$$

$$3x - 1 = X \Rightarrow \psi'(X) = -1$$

وبالمكاملة نجد أن

$$\psi(X) = -X \Rightarrow \psi(3x-1) = -(3x-1) \quad \text{—— ⑦}$$

نبدل 7 في 5 نحصل على :

$$\varphi(x) = 1 - x + 3x - 1 \Rightarrow \varphi(x) = 2x \quad \text{—— ⑧}$$

نبدل في العلاقة 7 بدل $3x-1$ بـ $3x - y^3$ نحصل على

$$\psi(3x - y^3) = -(3x - y^3) = y^3 - 3x \quad \text{—— ⑨}$$

نبدل (8، 9) في الحل العام 4 فنحصل على الحل الخاص

Date : / /   Subject:

$u(x,y) = 2x + y^3 - 3x$

$u(x,y) = y^3 - x$

دورة ٢٠١٩

ج٢)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$x\,u_{xy} - y\,u_{yy} - u_y = 2x^2$ ①

في المنطقة $x>0$ والمحققة للشروط الآتية،

$u|_{y=x} = \sin x \quad , \quad u_x|_{y=x} = \cos x$ — ②

$A=0 \quad , \; 2B = x \; , \quad C = -y$

$B^2 - AC = \frac{x^2}{4} > 0$

المعادلة المميزة

$A\,dy^2 - 2B\,dx\,dy + C\,dx^2 = 0$

$-x\,dx\,dy - y\,dx^2 = 0$

$-dx\,[x\,dy + y\,dx] = 0$

$-dx = 0 \implies x = c_1$ إما

أو $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$

$\ln y + \ln x = \ln c_2 \Rightarrow \ln(yx) = \ln c_2$

$y \cdot x = c_2$

$\xi = x \quad , \quad \eta = x \cdot y$ — ③

$\{$

$u_{\xi\eta} = 2\xi$

$\frac{\partial}{\partial \eta}[u_\eta] = 2\xi$

بتثبيت ξ والمكاملة بالنسبة لـ η نجد

$$u_\xi = \int 2\xi \, d\eta + \varphi_1(\xi)$$

$$u_\xi = 2\xi\eta + \varphi_1(\xi)$$

بتثبيت η والمكاملة بالنسبة ξ نجد

$$u(\xi,\eta) = 2\eta \int \xi \, d\xi + \int \varphi_1(\xi) \, d\xi + \psi(\eta)$$

$$= \xi^2\eta + \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$

$$u(x,y) = x^3 y + \varphi(x) + \psi(x,y) \quad \text{--- (4)}$$

وهو الحل العام

ايجاد الحل الخاص

نشتق عبارة الحل العام (4) بالنسبة لـ x:

$$u_x = 3x^2 y + \varphi'(x) + y\,\psi'(xy) \quad \text{--- (4')}$$

من (2) و (4) و (4') نجد:

$$\sin x = x^4 + \varphi(x) + \psi(x^2) \quad \text{--- (5)}$$

$$\cos x = 3x^3 + \varphi'(x) + x\cdot\psi'(x^2) \quad \text{--- (6)}$$

نشتق العلاقة 5 بالنسبة لـ x:

$$\cos x = 4x^3 + \varphi'(x) + 2x\,\psi'(x^2) \quad \text{--- (5')}$$

بطرح 5، 5 نجد:

$$0 = x^3 + x\,\psi'(x^2)$$

$$\psi'(x^2) = -x^2$$

نفرض $X = x^2 \Rightarrow \psi'(X) = -X \Rightarrow \psi(X) = -\frac{1}{2}X^2$

$$\psi(x^2) = -\frac{1}{2}(x^2)^2 \quad \text{--- (7)}$$

نبدل (7) في (5) فنحصل على

$$\varphi(x) = \sin x - x^4 + \frac{1}{2}x^4$$

Date : / / Subject: ....

$u(x) = \sin x - \frac{1}{2} x^4$ —— ⑧

نبدل في ⑦ كل x' بـ xy

$v(x,y) = -\frac{1}{2} x^2 y^2$ —— 9

نبدل 8 و 9 في الحل العام ④ :

$\star\ u(x,y) = x^3 y + \sin x - \frac{1}{2} x^4 - \frac{1}{2} x^2 y^2$

وهو الحل الخاص المطلوب.